Universidad Simón Bolívar
Departamento de Matemáticas
Puras y Aplicadas
Septiembre - Diciembre 2006

Nombre: ______________________________

Carnet: ________________ Sección: _____

MA-1121 DE HONOR— Segundo Parcial—

Cada ejercicio vale 10 puntos. Justifique sus afirmaciones.
Se corregirá sobre 5 ejercicios elegidos por usted.

1. Demuestre que
$$f(x) = \frac{x^2 + 2x + c}{x^2 + 4x + 3c}$$
toma todos los valores en $\mathbb{R}$ cuando c es una constante $0 < c < 1$. Dibuje una gráfica aproximada de f

2. Considere la función
$$f(x) = \frac{x^3}{1 + x^4}$$
   a) Encuentre los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$
   b) Encuentre intervalos de concavidad y convexidad de $f(x)$
   c) Encuentre máximos y mínimos locales de $f(x)$
   d) ¿Tiene $f(x)$ un máximo valor? ¿Un mínimo valor? Encontrarlos (si los hay).
   e) Dibuje una gráfica de $f(x)$ que refleje su análisis de (a), (b), (c) y (d).

3. Sea $f(x)$ una función derivable en todo $\mathbb{R}$ que verifique que $f(a+b) = f(a)\dot{f}(b)$ para cada $a, b \in \mathbb{R}$. Suponemos además que $f(x) \neq 0$ para cada $x \in \mathbb{R}$. Demuestre que existe un número $k \neq 0$ tal que $f^{'}(x) = k\, f(x)$ para cada $x \in \mathbb{R}$.
Sugerencia: Considere la igualdad $f(a+b) = f(a)\, f(b)$ y calcule derivadas respecto de a, suponiendo b fijo respecto de b suponiendo a fijo.

4. Entre todos los triángulos de área $\alpha > 0$ dada demuestre que el que es equilátero tiene perímetro mínimo.
Sugerencia: Demuestre primero que un tal triángulo (de perímetro mínimo) debe ser isósceles.

5. Calcule los siguientes límites.
$$\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \quad \frac{sec^2 x - 2 \operatorname{tg} x}{1 + \cos 4x}$$
$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x} - \frac{1}{x^2} \right).$$

6. *a*) Demostrar la siguiente desigualdad $(1+x)^r > 1+rx,$ donde $r \in \mathbb{Q},\ x > -1$ y $x \neq 0.$

   b) Probar que si

   i $x_1 \ldots x_n$ son números positivos

   ii $x_1 + \cdots + x_n = n$

   iii $x_1 \ldots x_n\,,$ no son todos iguales a 1

   entonces $x_1^r + \cdots + x_n^r > n\,,$ para $r \in \mathbb{Q}\,,\ r > 1$

   Sugerencia: Usar (a) para (b).